ΘΕΩΡΙΑ

1 Μιγαδικοί αριθμοί

Θεωρία

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ισότητα μιγαδικών

1.1 ☞ Να αναφέρετε πότε δύο μιγαδικοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, λέμε ότι είναι **ίσοι**.

Απάντηση

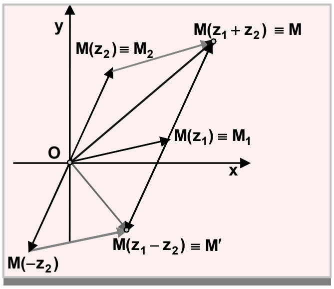
Δύο μιγαδικοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Εικόνα του αθροίσματος και της διαφοράς μιγαδικών

1.2 🕮 Η **διανυσματική ακτίνα** του **αθροίσματος** ή της **διαφοράς** δύο μιγαδικών αριθμών **ισούται** με το **άθροισμα** ή τη **διαφορά** των διανυσματικών ακτινών τους.

Απόδειξη



Έστω οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$

με εικόνες τα σημεία $M_1\equiv M(z_1)\equiv(\alpha,\beta)$

και $M_2\equiv M(z_2)\equiv(\gamma,\delta)$

αντίστοιχα.

Το άθροισμά τους, ισούται με $z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

Οπότε, ο z_1+z_2 παριστάνεται με το σημείο $M\equiv M(z_1+z_2)\equiv(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$

Δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

Η διαφορά τους, ισούται με $z_1-z_2=(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

Οπότε ο z_1-z_2, παριστάνεται με το σημείο $M'\equiv M(z_1-z_2)\equiv(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$

Δηλαδή $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$

Δυνάμεις του i

1.3 🕮 Να υπολογίσετε τις **φυσικές δυνάμεις** $\mathbf{i^\nu}$, του $\mathbf{i}$

Απόδειξη

Επειδή $\mathbf{i^4 = 1}$, κάθε δύναμη της μορφής $\mathbf{i^{4\rho}}$, $\mathbf{\rho \in N}$, ισούται με $\mathbf{i^{4\rho} = (i^4)^\rho = 1}$

Γενικότερα:

$$\mathbf{i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 \ , & \text{αν} \quad \upsilon = 0 \\ i \ , & \text{αν} \quad \upsilon = 1 \\ -1 \ , & \text{αν} \quad \upsilon = 2 \\ -i \ , & \text{αν} \quad \upsilon = 3 \end{cases}}, \ \mathbf{\nu}: \text{φυσικός αριθμός.}$$

$$\begin{array}{l|l} \nu & 4 \\ \cline{2-2} & \rho \\ \upsilon & \end{array}$$

Είναι γνωστό, με βάση την Ευκλείδεια διαίρεση

ότι για κάθε φυσικό $\mathbf{\nu}$, είναι $\mathbf{\nu = 4\rho + \upsilon}$ …με $\mathbf{\upsilon = 0,1,2,3}$

Συζυγείς μιγαδικοί

1.4 ☞ Να αναφέρετε, τι ονομάζουμε **συζυγή** αριθμό του μιγαδικού $\mathbf{z = \alpha + \beta i}$

Απάντηση

Ονομάζεται ο αριθμός, που συμβολίζεται με $\mathbf{\bar{z}}$ και ισούται με $\mathbf{\bar{z} = \overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i}$

Άθροισμα συζυγών

1.5 🕮 Για τους μιγαδικούς $\mathbf{z_1}$ και $\mathbf{z_2}$, είναι $\mathbf{\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$

Απόδειξη

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z_1 = \alpha + \beta i}$ και $\mathbf{z_2 = \gamma + \delta i}$

Είναι $\mathbf{\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$

Άλλες ιδιότητες των συζυγών

- $\mathbf{\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2}$
- $\mathbf{\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}$
- $\mathbf{\overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2}$, με $\mathbf{z_2 \neq 0}$
- $\mathbf{\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_\nu}$
- $\mathbf{\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_\nu}$
- $\mathbf{\overline{z^\nu} = \bar{z}^\nu}$, $\mathbf{\nu \in N^*}$ …Προκύπτει απλά, αν πριν θέσουμε $\mathbf{z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z}$

Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές

1.6 Να **λύσετε** την εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$

Απόδειξη

Εργαζόμενοι όπως στην **Α΄** Λυκείου
στους πραγματικούς, η εξίσωση με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων

γίνεται: $z^2+\frac{\beta}{\alpha}z+\frac{\gamma}{\alpha}=0$

ή $z^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\cdot z+\frac{\gamma}{\alpha}=0$

ή $z^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\cdot z+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}=0$

ή $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\equiv\frac{\Delta}{4\alpha^2}$

Θεωρήσαμε την διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, της εξίσωσης.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση, την $z=\frac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$, τότε επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{(-1)\cdot(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2\cdot\sqrt{-\Delta}^2}{(2\alpha)^2}=\left(\frac{i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$

Η εξίσωση γράφεται $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$ και έχει **λύσεις** τις $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

οι οποίες είναι και **συζυγείς**.

Τύποι Vieta

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq 0$ και **ρίζες** τις z_1, z_2

Ισχύουν οι σχέσεις ▪ $z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και ▪ $z_1z_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Μέτρο μιγαδικού

1.7 Να αναφέρετε, τι ονομάζουμε σαν **μέτρο** του μιγαδικού $z = x + yi$, $x, y \in R$

Απάντηση

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$

Λέμε **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z

την απόσταση της εικόνας του $M(z)$, από την αρχή $O(0,0)$

και συμβολίζουμε με $|z|$

Δηλαδή, $|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ιδιότητες μέτρου

1.8 Έστω $z = \alpha + \beta i$, $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ μιγαδικοί αριθμοί.

Είναι
- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Απόδειξη

Να σημειώσουμε ότι: $-z = -\alpha - \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$

- $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

  $|-z| = \sqrt{(-\alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $|\bar{z}| = \sqrt{(\alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{\,2} = (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ **Προφανές.**

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$ **Προφανές.**

- Είναι $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$, με $z_2 \neq 0$
- Επίσης γενικότερα, είναι και $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\nu|$, με $\nu \in N^*$

Πορίσματα στα μέτρα

1.9
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $|z^\nu| = |z|^\nu$
- $(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$ …όπου $M_1 \equiv M(z_1)$ και $M_2 \equiv M(z_2)$
- Η εξίσωση $|z - z_o| = \rho > 0$, δίνει τον **κύκλο κέντρου** $K(z_o)$ και ακτίνας ρ
- Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, δίνει τη **μεσοκάθετη** του M_1M_2

Α ξ ι ο λ ό γ η σ η

1.01 ☐ Ο αριθμός $1+i$ **δεν** είναι **φανταστικός**.

1.02 ☐ Ο αριθμός i **δεν** είναι **μιγαδικός**.

1.03 ☐ Ο αριθμός $2i$ είναι **μικρότερος** από τον αριθμό $3i$, αφού $2<3$

1.04 ☐ Ο αριθμός $2i$ είναι **θετικός φανταστικός**.

1.05 ☐ Ο αριθμός 2 είναι **θετικός** μιγαδικός αριθμός.

1.06 ☐ Ο αριθμός $2i$ έχει **εικόνα** το σημείο $M(0,2)$

1.07 ☐ Ο αριθμός 0 **δεν** είναι **φανταστικός**.

1.08 ☐ Ο αριθμός $\sqrt{-i^2}$ **δεν** είναι **πραγματικός**.

1.09 ☐ Κάθε **πραγματικός αριθμός δεν** είναι **μιγαδικός**.

1.10 ☐ Είναι $1+i=\sqrt{(1+i)^2}=\sqrt{1^2+2i+i^2}=\sqrt{1+2i-1}=\sqrt{2i}$

1.11 ☐ Είναι $\lambda i \neq -1$, για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ

1.12 ☐ Είναι $\alpha+\beta i \neq 0$ με $\alpha,\beta \in R$, μόνο αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

1.13 ☐ $\bar{1}=1$

1.14 ☐ $\bar{i}=-i$

1.15 ☐ Το φανταστικό μέρος του $z=1+2i$, είναι το $Im(z)=2i$

1.16 ☐ Για τον αριθμό $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta \in R$, είναι $Im\left(Re(z)i\right)=\alpha$

1.17 ☐ Για τον αριθμό $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta \in R$, είναι $Re\left(Im(z)+Re(z)\cdot i\right)=Im(z)$

1.18 ☐ Οι **συζυγείς** των **πραγματικών**, είναι οι **ίδιοι** οι **πραγματικοί** αριθμοί.

1.19 ☐ $\overline{1+\kappa i}=1-\kappa i$, αν $\kappa \in R$

1.20 ☐ $\overline{1+\kappa i}=1-\kappa i$, αν $\kappa \in C$

1.21 ☐ Είναι $\overline{(i^{2004})}=\overline{(i)}^{2004}=(-i)^{2004}=i^{2004}=\left(i^4\right)^{501}=1^{501}=1$

1.22 ☐ Για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$

1.23 ☐ Για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ή $z_1 = -z_2$

1.24 ☐ Η εικόνα του $z = ημθ + συνθi$, **κινείται** στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$

1.25 ☐ Αν η εικόνα του μιγαδικού z **κινείται** στην ευθεία $x = 1$, τότε $z - 1 \in I$

1.26 ☐ Αν $z_1 = α_1 + β_1 i$, $z_2 = α_2 + β_2 i$, είναι $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

1.27 ☐ Αν $z^2 \in I$, τότε και $z \in I$

1.28 ☐ Αν $z_1, z_2 \in C$ και $z_1 + iz_2 = 0$, τότε $z_1 = z_2 = 0$

1.29 ☐ Αν $i^5 = i^ν$ … $ν$:φυσικός, **υποχρεωτικά** θα είναι $ν = 5$

1.30 ☐ Αν για τους $z, w \in C$, είναι $z^2 + w^2 = 0$, τότε $z = w = 0$

1.31 ☐ Αν για τους $z, w \in C$ είναι $z^2 - 2zwi - w^2 = 0$, τότε $z = iw$

1.32 ☐ Αν $z = w - wi$, με $w \in C$, τότε είναι $\bar{z} = w + wi$

1.33 ☐ Η εξίσωση $z^2 + αz - 1 = 0$ με $α \in R$, έχει 2 **άνισες πραγματικές** ρίζες.

1.34 ☐ Η εξίσωση $z^2 + αz + α^2 = 0$, με $α \in R^*$, έχει δύο **μη πραγματικές** ρίζες.

1.35 ☐ Η εξίσωση $z^2 - αz + 1 = 0$, με $α \in R$ στο C, έχει **δύο ρίζες αντίστροφες**.

1.36 ☐ Οι **ρίζες** της εξίσωσης $z^2 + αz + 1 = 0$, με $-2 < α < 2$
στο επίπεδο, έχουν **εικόνες** σημεία **συμμετρικά** ως προς τον άξονα $x'x$

1.37 ☐ Αν για το μιγαδικό z είναι $z^3 = 1$, τότε θα είναι και $z = 1$

1.38 ☐ Επειδή $1 = i^6 = \left(i^2\right)^{\frac{6}{2}} = (-1)^{\frac{6}{2}} = (-1)^3 = -1$, στο C, είναι $1 = -1$

1.39 ☐ Αν ο $z_1 = 1 + i$ είναι **ρίζα** της εξίσωσης $z^2 - 2z + λ = 0$, με $z \in C$, $λ \in R$
τότε και ο αριθμός $z_2 = 1 - i$, είναι **ρίζα** της.

1.40☐ Αν ο $z_1 = i+1$ είναι **ρίζα** της εξίσωσης $z(z-1)=\lambda$, με $\lambda \in R$ τότε και ο αριθμός $z_2 = i-1$, είναι επίσης μία **ρίζα** της.

1.41☐ Έστω $\alpha v^2 + \beta v + \gamma = 0$, $\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ Επειδή η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ έχει σαν **ρίζες** τους v, w, είναι $v = \overline{w}$

1.42☐ $|1| = 1$

1.43☐ $|i| = 1$

1.44☐ $|\sqrt{2} - i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \sqrt{1} = 1$

1.45☐ $|2 \cdot i| = |2| \cdot |i| = 2$

1.46☐ $|2 + i| = |2| + |i| = 2 + 1 = 3$

1.47☐ $\big||z| \cdot i\big| = |z| \cdot |i| = |z|$

1.48☐ Αν $|z| = 1$, τότε θα είναι $z = 1$ ή $z = -1$

1.49☐ $|z^2| = |z|^2 = z^2$

1.50☐ Αν $z = |z|$, τότε η εικόνα $M(z)$ ανήκει στον ημιάξονα Ox

1.51☐ Αν $|z| = z \cdot \bar{z}$, τότε θα είναι $z = 0$ ή $|z| = 1$

1.52☐ Για κάθε **πραγματικό** αριθμό z, είναι πάντοτε $|z + i| = |z - i|$

1.53☐ Ο μιγαδικός είναι **Μηδενικός**, αν και μόνο αν το **μέτρο** του είναι **Μηδέν**.

1.54☐ Είναι $|\alpha + \beta i| = \sqrt{(\alpha)^2 + (\beta i)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, με $\alpha, \beta \in R$

1.55☐ Αν $z = 5\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5}\right)i\right)$, θα είναι $|z| = 5$

1.56☐ Αν για το μιγαδικό z είναι $z^{2012} = 1$, τότε θα είναι και $|z| = 1$

1.**57** ☐ Οι **λύσεις** της **εξίσωσης** $|z|=1$, είναι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του **κύκλου** κέντρου O και ακτίνας $\rho=1$

1.**58** ☐ Οι **λύσεις** της **εξίσωσης** $|z-1|=1$, είναι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του **κύκλου** κέντρου $K(-1{,}0)$ και ακτίνας $\rho=1$

1.**59** ☐ Οι **λύσεις** της **εξίσωσης** $|z-1|=|z-i|$, είναι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο, είναι σημεία της **ευθείας** $(\delta): y=x$

1.**60** ☐ Η εξίσωση $|z|^2-|z|+1=0$ με $z\in C$, είναι **αδύνατη**.

1.**61** ☐ Αν $|z|=1$, οι **εικόνες** των $1, z, \frac{1}{z}, \bar{z}, iz$, είναι **ομοκυκλικά** σημεία.

1.**62** ☐ Αν ένας μιγαδικός είναι **πραγματικός** τότε το **μέτρο** του θα ταυτίζεται και με την **απόλυτη τιμή** του.

1.**63** ☐ Το **μέτρο** της διανυσματικής ακτίνας του **αθροίσματος** δύο μιγαδικών ισούται με το **άθροισμα** των **μέτρων** των διανυσματικών ακτινών τους.

1.**64** ☐ Η **εξίσωση** $\left|z^{2004}\right|=|z-1|\ i$, στο σύνολο C, είναι **αδύνατη**.

1.**65** ☐ Από $|z|<1$ είναι και $-1<z<1$

1.**66** ☐ Οι **λύσεις** της εξίσωσης $|z+3|+|z-3|=10$, είναι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων οι **εικόνες** στο επίπεδο είναι σημεία της έλλειψης $(e): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

1.**67**✷ Να βρείτε ποιες από τις σχέσεις

☐Α: $|z_1-\bar{z}_2|=|\bar{z}_1-z_2|$

☐Β: $|\bar{z}_1|-|z_2|=|z_1|-|\bar{z}_2|$

☐Γ: $\left|\frac{z_1}{iz_2}\right|=\left|\frac{iz_1}{z_2}\right|$ με $z_2\neq 0$

☐Δ: $|z_1z_2|^2=z_1^2z_2^2$ είναι **ορθές**.

1.**68**✱ Αν $|z_1| \leq 2$ και $|z_2| \leq 1$, η **μεγαλύτερη** τιμή του μέτρου $|z_1 + z_2|$ **αποκλείεται** να είναι ίση με □Α: 1 □Β: 2 □Γ: 3 □Δ: 4

1.**69**✱ **Βρείτε** ποιες από τις ισότητες

□Α: $z\bar{z} = z^2$

□Β: $z - \bar{z} \in I$

□Γ: $z\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

□Δ: $z - \bar{z} = 2Im(z)$

□Ε: $\overline{z + \bar{z}} = z + \bar{z}$

□Ζ: $\overline{z + \bar{z}} = 2Re(z)$, **δεν ισχύει πάντα**.

1.**70**▢ Είναι $|i^2 + i^3| = \sqrt{2}$

1.**71**▢ Για κάθε **φανταστικό** αριθμό z ισχύει $|z| = |Im(z)|$

1.**72**▢ Αν για τον $z \in C$ είναι $Re(z) > 0$, από $z + \bar{z} = 2Re(z) > 0$, είναι $\bar{z} > -z$

1.**73**▢ Για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $z_1 \cdot z_2 \neq 0 \Leftrightarrow z_1 \neq 0$ και $z_2 \neq 0$

1.**74**▢ Αν για τους μιγαδικούς z, w είναι $|z| + |w| = 0$, τότε είναι $z = w = 0$

1.**75**▢ Αν για τους μιγαδικούς z_1 και z_2 είναι $|z_1| = |z_2|$, τότε $z_1^2 = z_2^2$

1.**76**▢ Αν $z_1, w_1, z_2, w_2 \in C$, με $z_1 + iz_2 = w_1 + iw_2$, τότε $z_1 = w_1$ και $z_2 = w_2$

1.**77**▢ Αν $z \in C^*$ και $z^{2102} = |z|$, τότε θα είναι $|z| = 1$

1.**78**▢ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι πάντοτε $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

1.**79**▢ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι πάντοτε $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

1.**80**▢ Αν $z \in C$ και $|z - 1| = |z + 1|$, τότε $z \in I$

Αξιολόγηση σε θέματα Πανελληνίων εξετάσεων

1.01 🕮 Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, αποδείξτε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

1.02 ☐ Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

1.03 🕮 Να αποδείξετε ότι η **διανυσματική ακτίνα** του **αθροίσματος 2** μιγαδικών αριθμών, ισούται με το **άθροισμα** των **διανυσματικών ακτινών** τους.

1.04 ☐ Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$

1.05 🕮 Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z και φυσικό ν είναι $|z^\nu| = |z|^\nu$

1.06 ☐ Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

1.07 ☐ Το **μέτρο** της **διαφοράς** των **διανυσματικών ακτίνων** δύο μιγαδικών είναι **μικρότερο** από το **άθροισμα** των **μέτρων** των διανυσματικών ακτινών τους.

1.08 ☐ Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

1.09 ☐ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

1.10 ☐ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

1.11 ☐ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

1.12 ☐ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$

1.13 ☐ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, όπου ο $z = \alpha + \beta i$ είναι μιγαδικός αριθμός.

1.14 ☐ Το **μέτρο** της **διαφοράς** δύο μιγαδικών, είναι ίσο με την **απόσταση** των εικόνων τους.

1.15 ☐ Οι εικόνες δύο **συζυγών** μιγαδικών $z, \bar{z}$, είναι **συμμετρικά** σημεία ως προς τον άξονα $x'x$

1.16 ☐ Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί, τότε ισχύει $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$

1.17 ☐ Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

1.18 ☐ Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 είναι $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ και $|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2|$

1.19 ☐ Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \ne 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

Θ έ μ α τ α

1.**1**● Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

Α) Να βρείτε την **τιμή** του αριθμού $2\sqrt{3}\,\mathrm{Re}(z)+4\,\mathrm{Im}(z)$

Β) Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

Γ) Να αποδείξετε ότι $z^2=-i\bar{z}$

Δ) Να αποδείξετε ότι $z^3\in I$

Ε) Να αποδείξετε ότι $2\cdot z^{302}=1-\sqrt{3}i$

1.**2**● Έστω οι **μη μηδενικοί** μιγαδικοί z,w, ώστε $z^2-2zw+2w^2=0$

Α) Να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{z}{w}$ **δεν** είναι **πραγματικός**.

Β) Να αποδείξετε ότι $|z|=\sqrt{2}\,|w|$

Γ) Αν τα σημεία $M(w)$ **ανήκουν** στον κύκλο $(\kappa): x^2+y^2=2$
να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $M(z)$ **ανήκουν** στον κύκλο $(c): x^2+y^2=4$

Δ) Αν $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right)>0$ και $M(w)\in(\delta): y=x$, να αποδείξετε ότι $z\in I$

1.**3**● Έστω ο αριθμός $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in R$
του οποίου οι εικόνες $M(z)$ κινούνται στον **κύκλο** $(\kappa): x^2+y^2=1$
Έστω και οι αριθμοί $w=i\cdot z$

Α) Αποδείξτε ότι τα $M(w)$ κινούνται στον ίδιο **κύκλο** και μάλιστα $OM(z)\perp OM(w)$

Β) Αν z_o είναι εκείνος ο z, ώστε το **μέτρο** $|z_o-2|$ να είναι το **ελάχιστο δυνατό**
να αποδείξετε ότι $|3w_o-4|=5$, όπου w_o ο αντίστοιχος αριθμός w

Γ) Αν $(w-z)^3=2+2i$, να **βρείτε** τους z^3 και w^3

1.**4**● Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2, με $|z_1|=1$ και $|z_2|=1$

Α) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right|=|z_1+z_2|$

Β) Να αποδείξετε η **απόσταση** των εικόνων των z_1, z_2 **δεν υπερβαίνει** το 2

Γ) Αν $\mathrm{Im}(z_1z_2)=-2^{-1}$, $\rho=\mathrm{Re}(z_1z_2)>0$, **i**) αποδείξτε ότι $|z_1||z_2|=\sqrt{\rho^2+4^{-1}}$
ii) να **βρείτε** τον $2z_1z_2$

1.**5**● Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, ώστε $|z| = |z - 1 - i|$

Α) Διαπιστώστε ότι οι εικόνες $M(z)$ βρίσκονται σε ευθεία, την οποία να **βρείτε**.

Β) Μετά, να **βρείτε** απ'αυτούς, εκείνον τον z που έχει το **ελάχιστο μέτρο**.

Γ) Έστω z_o εκείνος ο μιγαδικός από τους πιο πάνω με εικόνα στον $y'y$

Να **υπολογίσετε** την τιμή της δύναμης z_o^{2002}

1.**6**● Έστω $z_1 = 1 + \kappa i$, $z_2 = \kappa - i$, $\kappa \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι **i**) $\frac{z_1}{z_2} = i$ και **ii**) $\frac{z_2}{z_1} = -i$

Β) Να αποδείξετε ότι **i**) $z_1^4 = z_2^4$

ii) Να αποδείξετε ότι $(1 + \kappa i)^6 + (\kappa - i)^6 = 0$

Γ) Αν ο αριθμός $z_1 \cdot z_2$ είναι **φανταστικός**, **i**) να **βρείτε** τους z_1 και z_2

ii) και τότε να **βρείτε** τους $\nu \in N$, ώστε $-z_2 + (-z_2)^2 + (-z_2)^3 + \ldots + (-z_2)^\nu = -z_1$

1.**7**● Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, ώστε να είναι $zw + 1 = z - w$

Α) Να αποδείξετε ότι $z \neq -1$

Β) Να **εκφράσετε** τον w, ως συνάρτηση του z

Γ) Αν η εικόνα του w κινείται στον **κύκλο** κέντρου $O(0,0)$ και **ακτίνας** $\rho = 1$

να αποδείξετε ότι η εικόνα $M(z)$ του z κινείται στον **άξονα** $y'y$

Δ) Αν ο μιγαδικός z είναι **φανταστικός**, να αποδείξετε ότι $|w| = 1$

1.**8**● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon): z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 1 = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $z \in C$

Α) Να αποδείξετε ότι αυτή έχει **δύο ρίζες μη πραγματικές**.

Β) Έστω z_1, z_2 οι **ρίζες** αυτής, ώστε $\mathrm{Im}(z_1) > \mathrm{Im}(z_2)$

i) Να αποδείξετε ότι $(z_1 + z_2 - 2z_1z_2)^{1001} < 0$

ii) Να αποδείξετε ότι $z_1^2 - z_2^2 = 4\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta i$

iii) Αν $z_1^2 - z_2^2 = 2i$, να **προσδιορίσετε** τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

1.**9**● Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, ώστε $z_1+\bar{z}_2=2+2i$ και $2\bar{z}_1-z_2=1-i$

Α) Να αποδείξετε ότι $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β) Να αποδείξετε ότι $Im(z_1^2)+Im(z_2^2)=Im(z_1^3)+Im(z_2^3)=0$

Γ) i) Να αποδείξετε ότι οι z_1^{2v}, z_2^{2v}, $v\in N^*$ είναι **πραγματικοί** ή **φανταστικοί**.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z_1^{2v}+z_2^{2v}=32$, $v\in N^*$, έχει **μοναδική λύση** το 4

1.**10**● Έστω ο μιγαδικός αριθμός z, ώστε $|z-i|=1$

Α) i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z κινούνται σε **κύκλο**.

ii) Να αποδείξετε ότι $|z|\le 2$

iii) Να αποδείξετε ότι $4\le|z+4-4i|\le 6$

Β) Να αποδείξετε ότι το **μέγιστο** και το **ελάχιστο** του $|z-3i|$

είναι αντίστοιχα το 3 και το 1

Γ) i) Να αποδείξετε ότι $|z^2-1|\le 5$

ii) Να αποδείξετε ότι $|(z-4i)(z+3)|\le 26$

1.**11**● Έστω ο αριθμός $z=x+yi\in C-R$ και ο μιγαδικός $w=\dfrac{z+i}{z-1}$

Α) i) Αν $|w|=1$, δείξτε ότι τα $M(z)$ βρίσκονται στην **ευθεία** $y=-x$

ii) Αν $|z|=1$, δείξτε ότι τα $M(w)$ βρίσκονται στην **ευθεία** $y=-x$

Β) i) Αν $w\in R$, δείξτε ότι τα $M(z)$ βρίσκονται σε **ευθεία**.

ii) Αν $w\in I$, δείξτε ότι τα $M(z)$ βρίσκονται σε **κύκλο**.

Γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w

βρίσκονται στην **ευθεία** $(\varepsilon): y=x-\sqrt{2}$, δείξτε ότι $Re(z)+Im(z)\ge 0$

1.**12**● Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$, $\lambda \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι ο **γεωμετρικός τόπος** των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 4$

Β) Αν ισχύει $z + \bar{z} = 2$, να αποδείξετε ότι $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{37}$

Γ) Αν $|z| = 2$ και $Im(z) \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{4}{5}$

1.**13**● Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\Pi(z) = \dfrac{(z-1)\left(\bar{z}+1\right)}{\bar{z}+z}$, $Re(z) \neq 0$

Α) Να αποδείξετε ότι $\Pi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \Pi(z)$

Β) Έστω A και B δύο **σταθεροί** πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί από το 0

Έστω και οι αριθμοί $z = Ax + Byi$, $x \neq 0$, ώστε να είναι $Re\left(\Pi\left(-\overline{z^{-1}}\right)\right) = 0$

i) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

ii) Να αποδείξετε ότι τα $M(x, y)$, είναι σημεία της **έλλειψης** $(e): \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{A}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{B}\right)^2} = 1$

1.**14**● Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί w και $z = x + yi$, με $x, y \in R$ και $z \neq i$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις $|z - i| + |\bar{z} + i| = 2$ και $w = z - i + \dfrac{1}{z - i}$

Α) Να αποδείξετε ότι ο **γεωμετρικός τόπος** των εικόνων των αριθμών z είναι ο **κύκλος** $(\kappa): x^2 + (y-1)^2 = 1$

Β) Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + i = \dfrac{1}{z - i}$

Γ) Να αποδείξετε ότι ο w είναι **πραγματικός**, με $-2 \le w \le 2$

Δ) Να αποδείξετε ότι $4 \le |z + 2i - 4| \le 6$

Ε) Να αποδείξετε ότι το **μέγιστο μέτρο** του $z + 1 - i$, είναι ίσο με 2

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Β **Α**) Έστω η ορισμένη και **παραγωγίσιμη** στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f ώστε i) $f(x) \neq 0$, ii) $x^2 f'(x) = f(x) - f(x)\ln x$, για κάθε $x > 0$ και iii) $f'(1) = 1$

Α$_1$) Θα **αποδείξουμε** ότι $f(1) = 1$

Α$_2$) Θα **αποδείξουμε** ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$

Α$_3$) Θα **εξηγήσουμε** γιατί η $h(x) = f(x) - f'(x)(x+1)$ είναι **συνεχής** στο $[1,e]$

Β) Θα **αποδείξουμε** ότι υπάρχει $x_o \in (1,e)$, ώστε η **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$ να **διέρχεται** από το σημείο $B(-1,0)$

Γ$_1$) Θα **αποδείξουμε** ότι $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x > 0$

Γ$_2$) Θα **μελετήσουμε** τη συνάρτηση f ως προς την **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

Γ$_3$) Αν $\alpha > e$, να αποδείξετε ότι $(\alpha+1)^{\alpha} < \alpha^{\alpha+1}$

Δ$_1$) Θα **αποδείξουμε** την ισοδυναμία $3^x = x^3 \Leftrightarrow f(x) = f(3)$

Δ$_2$) Θα **αποδείξουμε** ότι η εξίσωση $3^x = x^3$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχει **ακριβώς 2 λύσεις**, μία την προφανή την 3 και μία ακόμα στο διάστημα $(2,e)$

Απάντηση

Α$_1$) Από $x^2 f'(x) = f(x) - f(x)\ln x$, για $x = 1$, είναι $f'(1) = f(1) - f(1)\ln 1$ ή $f(1) = 1$

Α$_2$) Αφού η συνάρτηση f **δεν μηδενίζεται** και είναι **συνεχής**, ως παραγωγίσιμη, θα διατηρεί **πρόσημο**.

Επειδή $f(1) > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$

Α$_3$) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f'(x)(x+1)$

είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

αφού από τη σχέση $x^2 f'(x) = f(x) - f(x)\ln x$ είναι $x^2 f'(x) = f(x)(1-\ln x)$

$$\text{ή} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} f(x), \quad x > 0$$

Β) Η **εφαπτομένη** (ε) της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$

είναι η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

Θέλουμε αυτή να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του $B(-1,0)$

Οπότε $0 - f(x_o) = f'(x_o)(-1-x_o) \Leftrightarrow f(x_o) = f'(x_o)(1+x_o)$

$$\Leftrightarrow f(x_o) - f'(x_o)(1+x_o) = 0$$

Έτσι, απαιτούμε να υπάρχει $x_o \in (1, e)$

που να είναι **λύση** της εξίσωσης $f(x_o) - f'(x_o)(1 + x_o) = 0$

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f'(x)(x+1)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$

Επίσης • $h(1) = f(1) - f(1)(1+1) = 1 - 2 = -1 < 0$

και • $h(e) = f(e) - f'(e)(e+1) = f(e) - f(e)\dfrac{1 - \ln e}{e^2}(e+1) = f(e) > 0$

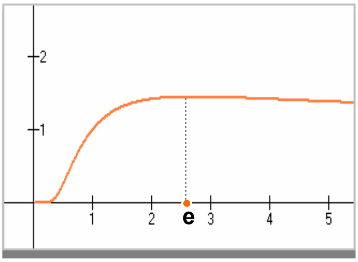
Οπότε $f(1)f(e) < 0$

Επομένως, ισχύουν οι υποθέσεις του **θ. Bolzano**

και συνεπώς θα υπάρχει $x_o \in (1, e)$, ώστε $h(x_o) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) - f'(x_o)(x_o + 1) = 0$

Γ$_1$) Από $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} f(x)$, είναι και $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow (\ln(f(x)))' = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$

Οπότε $\ln(f(x)) = \dfrac{\ln x}{x} + c$, $x > 0$ και $c \in R$



Για $x = 1$

παίρνουμε $\ln(f(1)) = \dfrac{\ln 1}{1} + c$ ή $\ln(1) = c$ ή $c = 0$

Άρα $\ln(f(x)) = \dfrac{\ln x}{x}$ ή $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, για κάθε $x > 0$

Γ$_2$) Είναι $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} f(x)$, με $f(x) \neq 0$

Ισχύει $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

x	0		e		+∞
f′(x)		+	o	−	
f		↗		↘	
			ο.μ.		

Η **μονοτονία** και τα **ακρότατα** της f φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e, +\infty)$

Για $x = e$, παρουσιάζει **μέγιστο** το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$

Γ$_3$) Αν $\boldsymbol{\alpha > e}$, είναι $\alpha+1>\alpha>e$, οπότε $f(\alpha+1)<f(\alpha)$, αφού η f είναι γν. φθίνουσα.

ή $e^{\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}} < e^{\frac{\ln(\alpha)}{\alpha}}$ ή $\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}<\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha}$ ή $\alpha\ln(\alpha+1)<(\alpha+1)\ln(\alpha)$ ή $\ln(\alpha+1)^{\alpha}<\ln(\alpha)^{\alpha+1}$

ή τελικά $\boldsymbol{(\alpha+1)^{\alpha} < \alpha^{\alpha+1}}$

Δ$_1$) $\boldsymbol{3^x = x^3} \Leftrightarrow x\ln3 = 3\ln(x) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{\ln(3)}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\frac{\ln(3)}{3}} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)=f(3)}$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση $\boldsymbol{3^x = x^3}$ έχει τις **ίδιες** ρίζες με την εξίσωση $\boldsymbol{f(x)=f(3)}$

Δ$_2$) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\boldsymbol{3^x = x^3}$ στο διάστημα $\boldsymbol{(0,+\infty)}$

έχει ακριβώς **2** λύσεις, μία την προφανή, την **3**, και μία ακόμα στο διάστημα $\boldsymbol{(2,e)}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi(x) = 3^x - x^3 \equiv f(x) - f(3)}$

Η μονοτονία της $\boldsymbol{\varphi}$ είναι **ταυτόσημη** με τη **μονοτονία** της **f**, αφού $\boldsymbol{\varphi' = f'}$

Μία **λύση** της $\boldsymbol{\varphi}$ είναι ο αριθμός $\boldsymbol{x_o = 3}$, αφού $\boldsymbol{\varphi(3) = 3^3 - 3^3 = 0}$

και μάλιστα μοναδική στο $\boldsymbol{[e,+\infty)}$, αφού η $\boldsymbol{\varphi}$ είναι **γνησίως φθίνουσα** σ' αυτό.

Στο διάστημα $\boldsymbol{(2,e)}$, **η** $\boldsymbol{\varphi}$ έχει **ακόμα μία λύση**.

Πραγματικά

Η $\boldsymbol{\varphi}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{[2,e]}$, σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- $\boldsymbol{\varphi(e) = f(e) - f(3) > 0}$

αφού e<3 είναι και f(e)>f(3), γιατί η **f** είναι **γνήσια φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$

- $\boldsymbol{\varphi(2) = f(2) - f(3) < 0}$

αφού 2<3 είναι και f(2)<f(3)

αφού

$f(2)<f(3) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln2}{2}} < e^{\frac{\ln3}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln2}{2}<\dfrac{\ln3}{3} \Leftrightarrow 3\ln2<2\ln3 \Leftrightarrow \ln2^3<\ln3^2 \Leftrightarrow 8<9$

Επομένως $\boldsymbol{\varphi(2)\varphi(e) < 0}$

Σύμφωνα με το **Θ.Bolzano**, υπάρχει $\boldsymbol{x_2 \in (2,e)}$ ώστε $\boldsymbol{\varphi(x_2) = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x_2) = f(3)}$

Δηλαδή, το $\boldsymbol{x_2}$ είναι **ρίζα** της $\boldsymbol{\varphi}$ και μάλιστα **μοναδική** στο διάστημα $\boldsymbol{(2,e)}$

αφού η **f** είναι γνήσια αύξουσα σ' αυτό.

Γ. **Α**) Έστω η ορισμένη και $1-1$ στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

και η ορισμένη στο διάστημα $\mathbf{\Delta}$ συνάρτηση $\mathbf{g}$, με $\mathbf{g(\Delta)=R}$

και $\mathbf{f(g(x))=x}$, για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$ από το $\mathbf{\Delta}$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι η **αντίστροφη** $\mathbf{f^{-1}}$ της συνάρτησης $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{\Delta}$

Β) **Θεωρούμε** τώρα τη συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}}$, με $\mathbf{x\in R}$

Β$_1$) Θα **μελετήσουμε** την $\mathbf{f}$ ως προς τη **μονοτονία** και την **καμπυλότητα**.

Β$_2$) Θα **αποδείξουμε** ότι η $\mathbf{f}$ είναι και **περιττή**.

Β$_3$) Θα **αποδείξουμε** ότι η $\mathbf{h(x)=f(\varepsilon\varphi x)-x}$, με $\mathbf{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ είναι **σταθερή**.

Β$_4$) Θα **βρούμε** την **αντίστροφη** συνάρτηση $\mathbf{f^{-1}}$ της συνάρτησης $\mathbf{f}$

Β$_5$) Θα **αποδείξουμε** ότι $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}}$ και $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}}$

Β$_6$) Αφού **διαπιστώσουμε** ότι η $\mathbf{y=x}$ είναι η **εφαπτόμενη** της $\mathbf{C_f}$ στο $\mathbf{O(0,0)}$
μετά θα **παραστήσουμε** τη συνάρτηση $\mathbf{f}$ στο καρτεσιανό **επίπεδο**.

Γ) Θα **βρούμε** τα **ολοκληρώματα** **Γ$_1$**) $\mathbf{I_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}}$ και **Γ$_2$**) $\mathbf{I_2=\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}}$

Απάντηση

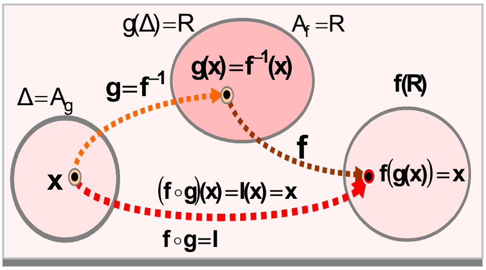
Α) Έστω η $1-1$ στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$
και η ορισμένη στο $\mathbf{\Delta}$ συνάρτηση $\mathbf{g}$

Από $\mathbf{f(g(x))=x}$, για κάθε $\mathbf{x\in\Delta}$

ισοδύναμα είναι $f^{-1}(f(g(x)))=f^{-1}(x)$

ή $(f^{-1}\circ f)(g(x))=f^{-1}(x)$

ή $\mathbf{g(x)=f^{-1}(x)}$, $\mathbf{x\in\Delta}$



Δηλαδή η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι η **αντίστροφη** της συνάρτησης $\mathbf{f}$ στο σύνολο $\mathbf{\Delta}$

Β) Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x)} = \int_0^x \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+t^2}}$, $\mathbf{x \in R}$

Β₁) $\mathbf{f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0}$, και έτσι η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

$\mathbf{f''(x)} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ και προφανώς η $\mathbf{f}$ στρέφει τα **κοίλα πάνω** στο $\mathbf{R_-}$

και τα **κοίλα κάτω** στο $\mathbf{R_+}$

Β₂) $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{-x} \frac{-1}{1+(-t)^2}d(-t) = \int_0^{x} \frac{-1}{1+y^2}dy = -\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = -f(x)$

…θέτουμε: $-t = y$ …Μετονομάζουμε: $y = t$

Οπότε διαπιστώνουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **περιττή** στο $\mathbf{R}$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τον πιο κάτω τρόπο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x) = f(-x) + f(x)} = \int_0^{-x} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+t^2}} + \int_0^{x} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+t^2}}$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων.

Οπότε $h'(x) = \left(\int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2}\right)' = \frac{1}{1+(-x)^2}(-x)' + \frac{1}{1+x^2} = 0$

Δηλαδή, είναι **σταθερή** στο $\mathbf{R}$

Συνεπώς

$\mathbf{h(x) \equiv h(0)} = \int_0^{0} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+t^2}} + \int_0^{0} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+t^2}} = \mathbf{0}$ και έτσι είναι $f(-x) + f(x) = 0$ ή $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

Β₃) $\mathbf{h(x) = f(εφx) - x} = \int_0^{εφx} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+t^2}}\mathbf{dt} - \mathbf{x}$, με $x \in Δ = \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$

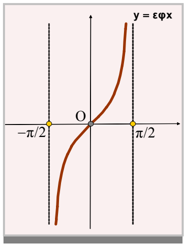
$$h'(x) = \frac{1}{1+εφ^2x}(εφx)' - 1 = \frac{1}{1+\frac{ημ^2x}{συν^2x}} \cdot \frac{1}{συν^2x} - 1 = \frac{συν^2x}{συν^2x + ημ^2x} \cdot \frac{1}{συν^2x} - 1 = 0$$

Άρα, η συνάρτηση $\mathbf{h}$ είναι **σταθερή,** με $h(x) \equiv h(0) = \int_0^{0} \frac{1}{1+t^2}dt - 0 = 0$

Δηλαδή $f(εφx) - x = 0$ ή $\mathbf{f(εφx) = x}$, με $\mathbf{x \in Δ}$

Β$_4$) Αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα, είναι $\mathbf{1-1}$, δηλαδή είναι **αντιστρέψιμη**.

Θέτουμε $\mathbf{g(x)=εφx}$, με $\mathbf{x \in Δ = \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)}$



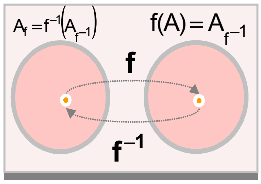
Το **πεδίο τιμών** της $\mathbf{g(x)=εφx}$ είναι προφανώς το $\mathbf{R}$

Από $\mathbf{f(εφx)=x}$ ή $\mathbf{f(g(x))=x}$

διαπιστώνουμε από το πρώτο ερώτημα, ότι $\mathbf{f^{-1}(x)=εφx}$, $\mathbf{x \in Δ}$

Β$_5$) Το **πεδίο τιμών** της $\mathbf{f}$ είναι το **πεδίο ορισμού** της $\mathbf{f^{-1}}$

και το **πεδίο ορισμού** της $\mathbf{f}$ είναι το **πεδίο τιμών** της $\mathbf{f^{-1}}$



Η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** και προφανώς **συνεχής**.

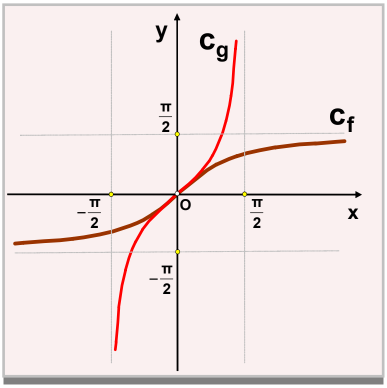
Το **πεδίο τιμών** της είναι το $\mathbf{f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)}$

Όμως, το πεδίο τιμών $\mathbf{f(R)}$ ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού $\mathbf{Δ}$ της $\mathbf{f^{-1}}$

Δηλαδή $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$, άρα $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{π}{2}}$, $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{π}{2}}$

Μπορούμε να κινηθούμε και με τον πιο εξής τρόπο.

Είναι γνωστό ότι $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\frac{π}{2}^+} εφx=-\infty}$



Από την σύνθεση στα όρια

προκύπτει $\lim\limits_{x\to-\frac{π}{2}^+} f(εφx)=\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Θέτουμε $y=εφx$

Επειδή $f(εφx)=x$

θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\frac{π}{2}^+} f(εφx)=\lim\limits_{x\to-\frac{π}{2}^+} x=-\frac{π}{2}$

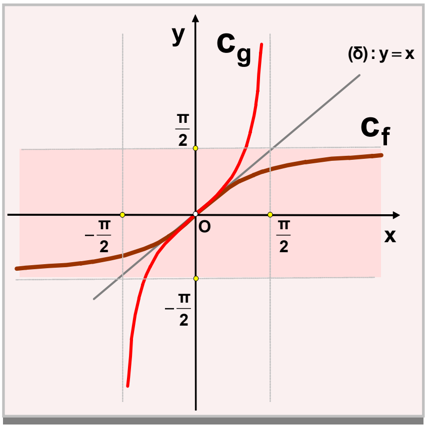
Δηλαδή $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{π}{2}}$ και ανάλογα διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{π}{2}}$

Β$_6$) Η **εφαπτομένη** της C_f

στο σημείο της **Ο(0,0)**

είναι η ευθεία $(\delta): y - f(0) = f'(0)(x-0)$

ή $(\boldsymbol{\delta}): \mathbf{y = x}$



Όπως είδαμε και προηγούμενα

δίπλα είναι τα διαγράμματα των $\mathbf{f, f^{-1}}$

Γ$_1$) $I_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt = f(1) = f\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

Το πιο πάνω ολοκλήρωμα μπορούμε να το υπολογίσουμε και με τον παρακάτω τρόπο.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 u}(\varepsilon\varphi u)'\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sigma\upsilon\nu^2 u \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1du = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$$

Θέτουμε $x = \varepsilon\varphi u$ …και αν $x = 0$ είναι $u = 0$ και αν $x = 0$ είναι $u = \frac{\pi}{4}$

Γ$_2$) Είναι $I_2 = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\int_0^{-1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$= -f(-1) + f(1)$, αφού η f είναι περιττή.

$= f(1) + f(1)$

$= 2f(1)$

$= 2\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

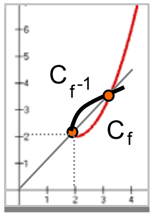
ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θ.**1**● Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w) = 3\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) + 4$ και $\mathrm{Im}(w) = 3\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z)$

Β) Αν οι εικόνες του w στο επίπεδο **κινούνται** στην **ευθεία** με εξίσωση $y = x - 12$ να αποδείξετε ότι οι **εικόνες** του z, **κινούνται** στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$

Γ) Να **βρείτε** ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς z, έχει το **ελάχιστο μέτρο**.



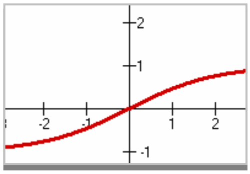
Θ.**2**● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \geq 2$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$

Β) Αφού διαπιστώσετε ότι η f **αντιστρέφεται**, μετά να **βρείτε** την f^{-1}

Γ) Προσδιορίστε τα **κοινά σημεία** των C_f , $C_{f^{-1}}$ με την $(\delta): y = x$

Δ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τις **γραφικές παραστάσεις** των συναρτήσεων f και f^{-1}



Θ.**3**● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f(-x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

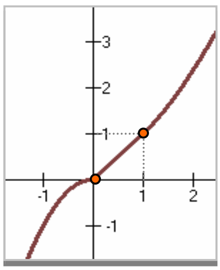
Α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$

Β) Να αποδείξετε ότι η f **αντιστρέφεται** και να **προσδιορίσετε** την f^{-1}

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει **μοναδική ρίζα** το **Μηδέν**.

Δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f^{-1}(x)dx = 0$, για κάθε πραγματική παράμετρο $\alpha \in (-1,1)$

Θ.**4**● Έστω η **συνεχής** συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 1 + x\ell nx & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

Β) Να υπολογίσετε τα **i**) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$, **ii**) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right)$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{1}{6}$

Θ.**5**● Έστω ο $z = a + bi$, $a,b \in R$ και η $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|z-i|x^3 - |z-1|x - x + 1}{x-1} & \text{αν } x > 1 \\ 1 & \text{αν } x \le 1 \end{cases}$

Α) Να αναφέρετε αν αυτή είναι **συνεχής** στα διαστήματα $(1,+\infty)$ και $(-\infty,1]$

Υποθέτουμε τώρα ότι αυτή είναι συνεχής στο R

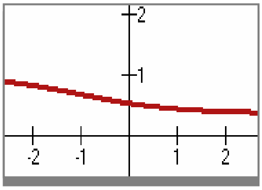
Β) Να αποδείξετε ότι οι **εικόνες** των z βρίσκονται σε **ευθεία** την οποία και να **βρείτε**.

Γ) Να βρείτε την **τιμή** του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Δ) Να αποδείξετε ότι **υπάρχουν μόνο δύο τέτοιοι μιγαδικοί**, οι $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$

Θ.**6**● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha + e^x}{1 + e^{x+1}}$, για κάθε $x \in R$ και η παράμετρος $\alpha \in R$

Γνωρίζουμε ότι $\left(1 + e^{x+1}\right)^2 f'(x) = e^x - e^{x+1}$, για κάθε $x \in R$



Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Β) Να **μελετήσετε** την f ως προς τη **μονοτονία**.

Γ) Για κάθε $x < 0$, αποδείξτε ότι $f(5x) + f(7x) < f(6x) + f(8x)$

Θ.**7**● Έστω η **συνεχής** στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x) = 3 + \displaystyle\int_{-1}^{-1+x} \left(\frac{f(t+1)}{f(t+1) - 1 - t} \right) dt$

με $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο R, με $f'(x)\left(f(x) - x\right) = f(x)$, $x \in R$

Β) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** $c \in R$ ώστε $c + 2xf(x) = f^2(x)$, για κάθε $x \in R$

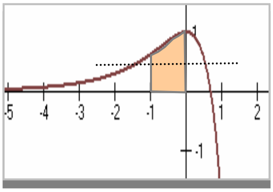
Γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + x$, $x \in R$

Δ) **i**) Να αποδείξετε ότι η f είναι **κυρτή**.

ii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt$, για κάθε $x \in R$

Θ.**8**● Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 4^x - m^x$, $m > 0$

Θέλουμε να είναι $f(R) = (-\infty, 1]$



Α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** τέτοιος m και είναι ο $m = 8$

Β) Να αποδείξετε ότι η f **δεν** είναι $1-1$

Γ) Να αποδείξετε ότι το **εμβαδόν** του χωρίου που **περικλείεται** από το διάγραμμα της f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = -1$, ισούται με $E = \dfrac{7}{12\ln 2}$ τ.μ.

Θ.**9**● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \dfrac{(\lambda^5 + \lambda - 1)x^2 - \kappa x + 2}{x - 3}}$, $\mathbf{\kappa, \lambda \in R}$ και $\mathbf{x \neq 3}$

Η ευθεία $\mathbf{(\delta) : y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της $\mathbf{C_f}$ στο $+\infty$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\kappa = 3}$ και $\mathbf{\lambda = 1}$

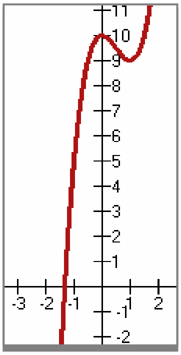
Β) **i**) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{(\delta) : y = x}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της $\mathbf{C_f}$ και στο $-\infty$

ii) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{(\varepsilon) : x = 3}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της $\mathbf{C_f}$

Γ) Να εξετάσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τη **μονοτονία**.

Δ) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) \leq 3 - 2\sqrt{2}}$ αν $\mathbf{x < 3}$ και $\mathbf{f(x) \geq 3 + 2\sqrt{2}}$, αν $\mathbf{x > 3}$

Θ.**10**● Έστω η $\mathbf{f(x) = 2x^3 - \kappa x^2 + 10}$, με $\mathbf{\kappa \in R}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$



Γνωρίζουμε ότι το **1** είναι **κρίσιμο σημείο** της **f**

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\kappa = 3}$

Β) **i**) Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τα **ακρότατα**.

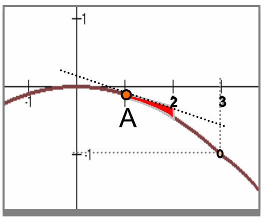
ii) Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της **f**

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x) = \alpha^2 - 2\alpha + 12}$

για κάθε τιμή του $\mathbf{\alpha \in R}$, έχει **ακριβώς μία λύση** στο **R**

Θ.**11**● Έστω η **συνεχής** συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{9}x^2 & \text{αν } x \leq 3 \\ \dfrac{\alpha - e^{x-3}}{x - 3} & \text{αν } x > 3 \end{cases}}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\alpha = 1}$



Β) Να βρείτε την **εφαπτομένη** $\mathbf{(\varepsilon)}$ της $\mathbf{C_f}$

στο σημείο της $\mathbf{A(1, f(1))}$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}$

Δ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα **C** της **f** , την ευθεία $\mathbf{(\varepsilon)}$ και την ευθεία $\mathbf{x = 2}$

Θ.**12**● Έστω η ορισμένη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση $\mathbf{f}$
ώστε $f'(x)=2x\ell nx+cx$, $c\in R$, $f''(x)=2\ln x+3$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$

Α) **i**) Να αποδείξετε ότι $c=1$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2\ell nx$, $x>0$

Β) Να μελετήσετε την **μονοτονία** της και να βρείτε τα **ακρότατα** της $\mathbf{f}$
Γ) Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς την **κυρτότητα** και να βρείτε τις **καμπές** της.

Θ.**13**● Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$, με f', g' συνεχείς.

Είναι $\int_0^x \big(f(t)\,g'(t)\big)dt=xe^x-e^x+1$ και $f'(x)g(x)=e^x$, για κάθε $x\in R$
και η ευθεία $(\delta): y=x$ είναι **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο της $O(0,0)$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)g(x)=xe^x$, για κάθε $x\in R$

Β) Να αποδείξετε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in R$

Γ) Να βρείτε το **πρόσημο** της $\mathbf{f}$

Δ) Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x$ και $f(x)=x$, $x\in R$

Θ.**14**● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2\lambda$, με $\lambda\in(0,1)$ **σταθερά**.

Α) Δείξτε ότι η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ένα **τ. μέγιστο**, ένα **τ. ελάχιστο** και **μία καμπή**.

Β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **ακριβώς τρεις** πραγματικές **ρίζες**.

Γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των **τ. ακρότατων** και x_3 η θέση της **καμπής**, δείξτε ότι τα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$, βρίσκονται στην $(\varepsilon): y=-2x-2\lambda$

Δ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν Ε** του χωρίου που περικλείεται από τη **γραφική παράσταση C** της συνάρτησης $\mathbf{f}$ και την **ευθεία** (ε)

Θ.**15**● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $\alpha>1$, ώστε $f(x)\ge 1$, για κάθε $x>-1$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$

Β) Να αποδείξετε ότι $e^e\ge \ln(e^2+e)$

Γ) **i**) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **κυρτή**.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1,0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right)=(x^7-1)\left(1-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο $(1,2)$

Θ.**16**● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \ln\left(\left(x^2+1\right)e^{2x}\right)},\ \mathbf{x \in R}$

Α) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα**.

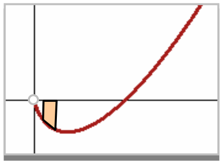
Β) Να αποδείξετε την **ισοδυναμία**: $\mathbf{e^{2x^2-2} = \dfrac{1}{x^4-2x^2+2} \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}}$

Γ) Να αποδείξετε ότι οι **κλίσεις** της $\mathbf{C_f}$ παίρνουν **τιμές** από το διάστημα $\mathbf{[1,3]}$

Δ) Να **βρείτε** την τιμή του ολοκληρώματος $\mathbf{\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx}$

Ε) Να **βρείτε** την τιμή των $\mathbf{I = \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)dx}$ και $\mathbf{J = \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}\right)dx}$

Θ.**17**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f''(x) = x^{-1}},\ \ \mathbf{x > 0}$ και $\mathbf{f'(1) = -1}$, $\mathbf{f(1) = -2}$

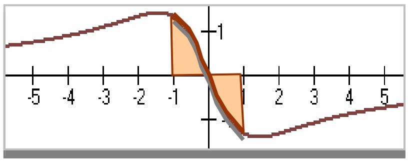


Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = x\ln x - 2x}$

Β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{x \geq e^{\frac{2x-e}{x}}}$, για κάθε $\mathbf{x > 0}$

Γ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα $\mathbf{C}$ της $\mathbf{f}$, τον $\mathbf{x'x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\mathbf{x = 1}$ και $\mathbf{x = e}$

Θ.**18**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \dfrac{|x-1-i|^2 - |x+1-i|^2}{x^2+2}}$



Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = -\dfrac{4x}{x^2+2}}$

Β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(R) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]}$

Γ) Να βρείτε το $\mathbf{\int_{1}^{-1} f(x)\,dx}$

Θ.**19**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f'}$ συνεχή.

για την οποία ισχύει $\mathbf{(x+1)f(x) - \int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^3 + x^2 - x - 1}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(1) = 0}$

Β) Να **αποδείξετε** ότι $\mathbf{f'(x) = 3x - 1},\ \mathbf{x \in R}$

Γ) Να **βρείτε** την $\mathbf{f}$

Δ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου, που περικλείεται από το διάγραμμα της $\mathbf{f}$ τον $\mathbf{x'x}$ και την ευθεία $\mathbf{x = 2}$

Θ.**146**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{e^{f(x)}+f(x)=x+1,\ x\in R}$

Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι **συνεχής** στο **R**

Α) **i)** Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** η $\mathbf{f^{-1}}$ και να **βρείτε** τον **τύπο** της $\mathbf{f^{-1}}$ στο $\mathbf{f(R)}$

ii) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

Β) **i)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ii) Να αποδείξετε ότι η **αντίστροφη** $\mathbf{f^{-1}}$ **ορίζεται** τελικά στο διάστημα $\mathbf{R}$

iii) Να **λύσετε** τις εξισώσεις $f^{-1}(x)=0$, $f^{-1}(x)=e$, $f(x)=0$, $f(x)=x$

Γνωρίζουμε επίσης τώρα ότι η **f** είναι και **παραγωγίσιμη** στο **R**

Γ) **i)** Να αποδείξετε ότι $f(x)-x-2\neq 0$

ii) Αφού αποδείξετε ότι $f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=1$, μετά υπολογίστε το $I=\int_0^e\left(\dfrac{dx}{2+x-f(x)}\right)$

iii) Υπολογίστε τα **όρια** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}\right)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-x}{f(x)}\right)$

Δ) **i)** Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **δύο φορές παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ **στρέφει** τα **κοίλα κάτω** στο $\mathbf{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι $2f(x)\le x$, για κάθε $x\in R$

Ε) **i)** Να **παραστήσετε** την αντίστροφη $\mathbf{f^{-1}}$ και την $\mathbf{f}$ στο καρτεσιανό **επίπεδο**.

ii) Υπολογίστε την **τιμή** του **ολοκληρώματος** $J=\int_0^e f(x)\,dx$

Θ.**147**● Έστω η συνάρτηση $f / \Delta = [0,\pi]$, με f' συνεχή και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ώστε να είναι $\sigma\upsilon\nu x f(x) \neq \eta\mu x f'(x)$, για κάθε $x \in [0,\pi]$

Α) i) Να αποδείξετε ότι $f(0) \neq 0$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(\pi) \neq 0$

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ **δεν** μπορεί να **οριστεί** στο $[0,\pi]$

Γ) Έστω τώρα και η συνάρτηση $T(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$

i) Να αποδείξετε ότι $T'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0,\pi)$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση T είναι **γνήσια αύξουσα** στο $(0,\pi)$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει **ακριβώς μία ρίζα** ρ στο $[0,\pi]$

iv) Να βρείτε το **πρόσημο** της συνάρτησης f

v) Να αποδείξετε ότι $f(0) < 0$ και ότι $f(\pi) > 0$

vi) Να αποδείξετε ότι $0 < \rho < \frac{\pi}{2}$

vii) Να αποδείξετε ότι $2f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}$

Δ) i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} T(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to \pi} T(x) = +\infty$

ii) Να αποδείξετε ότι $T((0,\pi)) = R$

Θ.**148**● **Α**) Έστω η ορισμένη και **συνεχής** στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

i) Είναι γνωστό ότι αν

● $\alpha = \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

● $f(x) = 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

● Αν όμως $\alpha \neq \beta$ και η f **δεν είναι μηδενική**, δείξτε ότι αυτή έχει μία **ρίζα**.

ii) Έστω ότι $f(x) \neq 0$ και $\int_{0}^{\rho} f(t)\,dt = 0$, να **βρείτε** τον ρ

Β) Αν για την ορισμένη και **συνεχή** στο $\Delta = [\alpha,\beta]$ συνάρτηση h

με $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx = 0$, να αποδείξετε ότι $h(x) = 0$

Γ) Αν τώρα για την ορισμένη και **συνεχή** στο $\Delta = [0,1]$ συνάρτηση f

είναι $2\int_{0}^{1} f^2(x)\,dx = e^2 - 1$ και $2\int_{0}^{1} e^x f(x)\,dx = e^2 - 1$, να **βρείτε** την f

Δ) Αν για την ορισμένη και **συνεχή** στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση f είναι $f(x) \geq$ **συνx**

για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 1$, να **βρείτε** τη συνάρτηση f

Ε) Έστω και η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$ ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [0,1]$

i) Να αποδείξετε ότι $f^n(x) \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

ii) Αν τώρα ξέρουμε ότι $\int_{0}^{1} (e^x - x)^n\,dx = 1$, με $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $n = 0$

Ζ) Έστω η παραγωγίσιμη στο **οποιοδήποτε διάστημα** $[\alpha,\beta]$, συνάρτηση f

με συνεχή f', ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} (f'(x))^2\,dx = f^2(\alpha) - f^2(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 0$, $x \in [\alpha,\beta]$

ii) Αν $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1$, να βρείτε τον **τύπο** της f

Η) Έστω η ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $3\int_{0}^{1} f^2(x)\,dx \leq 1 \leq 3\int_{0}^{1} x f(x)\,dx$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

⌛ Διαγώνισμα 1

Όνομα:... ΒΑΘΜΟΣ:..........

Διάρκεια: **3** ώρες

Ημερομηνία: ....../....../..........

ΘΕΜΑ Α

A₁ Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\mathbf{\Delta}$ και $\mathbf{x_o}$ ένα εσωτερικό σημείο του $\mathbf{\Delta}$ στο οποίο είναι **παραγωγίσιμη**.

Αν η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο $\mathbf{x_o}$, δείξτε ότι $\mathbf{f'(x_o)=0}$ (**9** μονάδες)

A₂☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ παρουσιάζει στο σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της **τοπικό ελάχιστο**. (**6** μονάδες)

B Απαντήστε με ένα **Σωστό ή Λάθος** (**10** μονάδες)

B₁ ☐ Κατά την επέκταση από το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών στο σύνολο $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών, η διάταξη και οι ιδιότητές της που ισχύουν στο $\mathbf{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν και στο $\mathbf{C}$

B₂ ☐ Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\mathbf{\Delta}$ στα οποία η συνεχής $\mathbf{f}$ **δεν** παραγωγίζεται **ή** η παράγωγός της είναι **ίση** με $\mathbf{0}$ λέγονται **κρίσιμα σημεία** της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{\Delta}$

B₃ ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $f(x)>0$ «κοντά» στο x_o, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=+\infty$

B₄ ☐ Αν για τη συνεχή $\mathbf{f}$ είναι $\int_0^1 f(x)dx=2012$ υπάρχει $\rho\in[0,1]$, ώστε $f(\rho)>0$

B₅ ☐ Μία συνάρτηση $f:A\to R$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο $\mathbf{y}$ του **συνόλου τιμών** της, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει **ακριβώς μια λύση** ως προς $\mathbf{x}$

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $z(n-w)=1-nw$, με $n \in N$, $n>1$ και $|w|=1$

Α) Να αποδείξετε ότι $z \neq n$ (2 μονάδες)

Β$_1$) Να αποδείξετε ότι $|1-nz|=|n-z|$ (5 μονάδες)

Β$_2$) Να αποδείξετε ότι τα $M(z)$ ανήκουν στον **κύκλο** $(\kappa): x^2+y^2=1$ (5 μονάδες)

Γ) Έστω $z_1 \neq z_2$, οι εικόνες δύο μιγαδικών από τους προηγούμενους αριθμούς z

Να αποδείξετε ότι **Γ$_1$**) $|z_1+z_2| \leq 2$ και **Γ$_2$**) $A=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} \in R$ (8 μονάδες)

Δ) Αν είναι και $A=1$, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|=1$ (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$ και $f(0)=0$

για την οποία ισχύει $x < f'(x) < x+1$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Α$_1$) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ και $h(x)=\frac{x^2}{2}+x-f(x)$

είναι **γνησίως αύξουσες** στο $[0,+\infty)$ (6 μονάδες)

Α$_2$) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}x^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x^2+x$ (4 μονάδες)

Α$_3$) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$ (4 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει μόνο ένας** $x_o>0$, ώστε $f(x_o)=2012$ (4 μονάδες)

Γ) Να **βρείτε** τον $\nu \in N^*$ και τον $\ell \in R^*$, ώστε $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^\nu f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\ell$ (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$, για κάθε $x>0$

$\int_1^{x^2-x+1} ef(t)dt \geq \int_{2011}^{2012}(x-x^2)dt$, $\ln x - x = \left(\int_x^1 \left(\frac{\ln t - t}{f(t)}\right)dt - e\right)|f(x)|$, για κάθε $x>0$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x}(\ln x - x)$, για κάθε $x>0$ (5 μονάδες)

Β$_1$) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$ (5 μονάδες)

Β$_2$) Να αποδείξετε ότι η $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$ είναι **κυρτή**. (5 μονάδες)

Γ) Να αποδείξετε ότι $F(x)+F(3x)>2F(2x)$, για κάθε $x>0$ (5 μονάδες)

Δ) Να αποδείξετε ότι **ακριβώς ένα** $r \in (1,2)$, ώστε $F(1)+F(3)=2F(r)$ (5 μονάδες)

Καλή επιτυχία !